

УДК 517.9+517.433

**О ВОЛНОВЫХ ОПЕРАТОРАХ МНОГОМЕРНОГО  
ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА**

**Э.Х.ЭЙВАЗОВ**

*Бакинский Государственный Университет,  
Институт Математики и Механики НАН Азербайджана  
eyvazovelshad@mail.ru*

*В работе методом Кука доказывается существование волновых операторов многомерного оператора Шредингера. При определенных условиях на электрический потенциал устанавливается их изометричность. Кроме того, находятся начальные и конечные области этих операторов.*

**Ключевые слова:** оператор Шредингера, волновые операторы, оператор рассеяния, метод Кука.

В настоящей работе в пространстве  $L_2(R_n)$  ( $n \geq 3$ ) исследуются волновые операторы оператора Шредингера, порожденные дифференциальным выражением

$$l_q = -\Delta + q(x),$$

где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_n$ ,  $q(x)$  - вещественный электрический потенциал.

Предположим, что для некоторого положительного числа  $\varepsilon$ , меньше единицы, измеримая функция  $q(x)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$i) \int_{R_n} (1+|x|)^{2-n+\varepsilon} |q(x)|^2 dx < +\infty;$$

$$ii) \text{ для каждого } a \in R_n, \frac{q(x)}{|x-a|^{\frac{n-2-\varepsilon}{2}}} \in L_{2,loc}(R_n), \text{ где } |x-a|^2 = \sum_{k=1}^n (x_k - a_k)^2.$$

Введем оператор  $\tilde{H}_q : L_2(R_n) \rightarrow L_2(R_n)$  по формуле  $\tilde{H}_q u = \ell_q u$  с областью определения  $D(\tilde{H}_q) = C_0^\infty(R_n)$  ( $C_0^\infty(R_n)$  - совокупность всех фи-

нитных бесконечно дифференцируемых в  $R_n$  функций). Если  $q(x) = 0$ , то  $\tilde{H}_q$  обозначим через  $\tilde{H}_0$ . Замыкания операторов  $\tilde{H}_q$  и  $\tilde{H}_0$  обозначим через  $H$  и  $H_0$ , соответственно. Очевидно, что  $H_0$  является самосопряженным абсолютно непрерывным оператором с областью определения  $W_2^m(R_n)$  (пространство Соболева  $m$ -го порядка) и его спектр заполняет положительную полуось, т.е.  $\sigma(H_0) = \sigma_{ac}(H_0) = [0, +\infty)$ . А самосопряженность оператора  $H$  и совпадение его области определения с  $W_2^m(R_n)$  следует из работы [1] (см. также [2] и [3]).

Рассмотрим однопараметрические группы  $e^{-itH}$ ,  $e^{-itH_0} \equiv e^{it\Delta}$ , порожденные операторами  $-iH$ ,  $-iH_0 \equiv i\Delta$ , соответственно, и однопараметрическое семейство унитарных операторов

$$W(t) = e^{itH} e^{it\Delta}, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Нас интересует асимптотическое поведение семейства  $\{W(t)\}$  при  $t \rightarrow \pm\infty$ , которое важно для физических приложений, поскольку  $W(t)$  используется для описания движения квантово-механической системы в так называемом представлении взаимодействия. Сильные пределы  $W_{\pm}$  семейства  $\{W(t)\}$  при  $t \rightarrow \pm\infty$ , если они существуют, называются волновыми операторами, соответствующими паре  $(H, H_0)$ , а  $S = W_+^* W_-$  - оператором рассеяния. Они есть основные величины теории рассеяния (см., например, [4], [5] или [6]).

Для доказательства существования волновых операторов мы будем использовать метод Кука, который заключается в следующем.

**Предложение (Метод Кука) (см. [4, с. 31, Теорема XI.4] или [7, с. 659, Теорема 3.7]).** Пусть  $A$  и  $B$  - самосопряженные операторы. Предположим, что существует множество  $D \subset D(B) \cap P_{ac}(B)H$ , которое плотно в  $P_{ac}(B)H$  так, что для любого  $\varphi \in D$  найдется  $T_0$ , удовлетворяющее условиям

$$(a) \quad e^{-iBt} \varphi \in D(A) \text{ при } |t| > T_0,$$

$$(b) \quad \int_{T_0}^{+\infty} \left[ \|(B - A)e^{-iBt} \varphi\| + \|(B - A)e^{iBt} \varphi\| \right] dt < +\infty.$$

Тогда  $W_{\pm} := W_{\pm}(A, B)$  существуют.

**Теорема.** Пусть выполняются условия *i*) и *ii*). Тогда  $W_{\pm}$  существуют и являются частично изометрическими операторами с начальным пространством  $L_2(R_n)$ .

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие леммы.

**Лемма 1.** Для любого положительного числа  $\sigma$  множество

$$D = \left\{ e^{-\sigma|x-a|^2} \right\}_{a \in R_n}$$

всюду плотно в  $L_2(R_n)$ .

**Доказательство.** Пусть существует функция  $g(x)$  из  $L_2(R_n)$  такая, что  $\forall a \in R_n$

$$\int_{R_n} g(x) e^{-\sigma|x-a|^2} dx = 0.$$

Тогда по равенству Парсеваля имеем

$$\int_{R_n} \tilde{g}(p) \left[ \int_{R_n} e^{-\sigma|x-a|^2} e^{i(p,x)} dx \right] dp = 0,$$

где  $\tilde{g}(p)$  - преобразование Фурье функции  $g(x)$ ,  $(p,x) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$ . Элементарные вычисления показывают, что  $\forall a \in R_n$

$$\left( \frac{\pi}{\sigma} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{R_n} \left[ \tilde{g}(p) e^{-\frac{|p|^2}{4\sigma}} \right] e^{i(p,a)} dp = 0,$$

где  $|p|^2 = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2$ . Отсюда следует, что почти всюду  $\tilde{g}(p) e^{-\frac{|p|^2}{4\sigma}} = 0$ , следовательно,  $g(x) = 0$  в  $L_2(R_n)$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.**  $\forall s > 0$

$$\sup_{0 \leq r < +\infty} \left\{ r^m e^{-\frac{r^2}{2s}} \right\} = \begin{cases} (sm)^{\frac{m}{2}} e^{-\frac{m}{2}}, & \text{если } m > 0, \\ 1, & \text{если } m = 0. \end{cases}$$

Доказательство леммы тривиально. Отметим, что эта лемма ранее использовалась в работах [7, с. 662] и [8].

**Лемма 3.**  $\forall \sigma > 0$  и любого натурального  $n$  справедливо

$$e^{it\Delta} \left( e^{-\sigma|x-a|^2} \right) = \frac{(-1)^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \frac{e^{-\frac{\sigma|x-a|^2}{1+4t\sigma i}}}{(1+4t\sigma i)^{\frac{n}{2}}}, \quad (1)$$

где  $\Gamma$  - эйлеров интеграл первого рода.

**Доказательство.** Учитывая, что  $e^{it\Delta}$  является интегральным опе-

ратором с ядром  $\frac{e^{-\frac{|x-a|^2}{4t}}}{(4\pi it)^{\frac{n}{2}}}$ , имеем:

$$e^{it\Delta} \left( e^{-\sigma|x-a|^2} \right) = \frac{1}{(4\pi it)^{\frac{n}{2}}} \int_{R_n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} e^{-\sigma|y-a|^2} dy =$$

$$= \frac{1}{(4\pi it)^{\frac{n}{2}} R_n} \int e^{-\sigma|\eta|^2} e^{i\frac{|\eta-(x-a)|^2}{4t}} d\eta.$$

Направляя ось  $\eta_n$  в направлении вектора  $x - a$  и переходя от переменных  $\eta$  к полярным координатам, получим

$$e^{i\Delta} \left( e^{-\sigma|x-a|^2} \right) = \frac{e^{\frac{i|x-a|^2}{4t}} \sigma_{n-1}}{(4\pi it)^{\frac{n}{2}}} \int_0^{+\infty} \left\{ \int_0^\pi e^{i\frac{r|x-a|}{2t} \cos \varphi_1} \sin^{n-2} \varphi_1 d\varphi_1 \right\} r^{n-1} e^{-\sigma^2 + i\frac{r^2}{4t}} dr, \quad (2)$$

где  $\sigma_{n-1}$  - площадь поверхности единичной сферы в  $R_{n-1}$ . Переходя к новым переменным

$$k = \frac{r|x-a|}{2t}, \quad \cos \varphi_1 = \xi,$$

приведем внутренний интеграл в (2) к виду

$$\int_0^\pi e^{-\frac{r|x-a|}{2t} \cos \varphi_1} \sin^{n-2} \varphi_1 d\varphi_1 = \int_{-1}^1 (1-\xi)^{\frac{n-1}{2}-1} (1+\xi)^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-ik\xi} d\xi.$$

Используя формулу (см. [9, с. 335, формула 3.387, 2])

$$\int_{-1}^1 (1-\xi)^{\frac{n-1}{2}-1} (1+\xi)^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-ik\xi} d\xi = \sqrt{\pi} \left( \frac{2}{-k} \right)^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left( \frac{n-1}{2} \right) J_{\frac{n-1}{2}}(-k),$$

где  $J_\nu$  - функция Бесселя порядка  $\nu$ , имеем

$$\int_0^\pi e^{-\frac{r|x-a|}{2t} \cos \varphi_1} \sin^{n-2} \varphi_1 d\varphi_1 = (-1)^{\frac{n-2}{2}} \sqrt{\pi} \Gamma\left( \frac{n-1}{2} \right) 2^{n-2} \frac{t^{\frac{n-2}{2}}}{(r|x-a|)^{\frac{n-2}{2}}} J_{\frac{n-2}{2}}\left( -\frac{r|x-a|}{2t} \right). \quad (3)$$

Пользуясь формулами (2) и (3), получаем

$$e^{i\Delta} \left( e^{-\sigma|x-a|^2} \right) = \frac{\sigma_{n-1} (-1)^{\frac{n-2}{2}} \sqrt{\pi} 2^{n-2} \Gamma\left( \frac{n-1}{2} \right) t^{\frac{n-2}{2}}}{|x-a|^{\frac{n-2}{2}} (4\pi it)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{i|x-a|^2}{4t}} \times \\ \times \int_0^{+\infty} r^{\frac{n}{2}} e^{-(\sigma - i\frac{1}{4t})r^2} J_{\frac{n-2}{2}}\left( -\frac{r|x-a|}{2t} \right) dr. \quad (4)$$

Теперь вычислим интеграл

$$\int_0^{+\infty} r^{\frac{n}{2}} e^{-(\sigma - i\frac{1}{4t})r^2} J_{\frac{n-2}{2}}\left( -\frac{r|x-a|}{2t} \right) dr.$$

Обозначая  $z = -\frac{r|x-a|}{2t}$ , имеем

$$\int_0^{+\infty} r^{\frac{n}{2}} e^{-(\sigma - i\frac{1}{4t})r^2} J_{\frac{n-2}{2}}\left( -\frac{r|x-a|}{2t} \right) dr = (-1)^{\frac{n}{2}} \left( \frac{2t}{|x-a|} \right)^{\frac{n+1}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\sigma - i\frac{1}{4t}\right) \frac{4t^2}{|x-a|^2} z^2} z^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(z) dz. \quad (5)$$

Учитывая (5) в (4), имеем

$$e^{i\Lambda} \left( e^{-\sigma|x-a|^2} \right) = \frac{\sigma_{n-1} \sqrt{\pi} (-1)^{n-1} 2^{\frac{3n-2}{2}} t^n e^{\frac{i|x-a|^2}{4t}} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\sigma - i\frac{1}{4t}\right) \left(\frac{2tz}{|x-a|}\right)^2} z^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(z) dz}{(4\pi it)^{\frac{n}{2}} |x-a|^n} \quad (6)$$

Обозначая  $\alpha = \left(\sigma - i\frac{1}{4t}\right) \frac{4t^2}{|x-a|^2}$  и  $\nu = \frac{n}{2} - 1$ , получаем

$$\int_0^{+\infty} e^{-\left(\sigma - i\frac{1}{4t}\right) \frac{4t^2}{|x-a|^2} z^2} z^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(z) dz = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 z^{\nu+1}} J_{\nu}(z) dz. \quad (7)$$

Пользуясь формулой (см. [9, с. 731, формула 6.631, 4])

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^{\nu+1}} J_{\nu}(\beta x) dx = \frac{\beta^{\nu}}{(2\alpha)^{\nu+1}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}},$$

перепишем равенство (7) в виде

$$\int_0^{+\infty} e^{-\left(\sigma - i\frac{1}{4t}\right) \frac{4t^2}{|x-a|^2} z^2} z^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(z) dz = \frac{1}{\left[2\left(\sigma - i\frac{1}{4t}\right) \frac{4t^2}{|x-a|^2}\right]^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-a|^2}{4\left(\sigma - i\frac{1}{4t}\right) 4t^2}}. \quad (8)$$

По формуле (8) равенство (6) принимает вид

$$\begin{aligned} e^{i\Lambda} \left( e^{-\sigma|x-a|^2} \right) &= \frac{\sigma_{n-1} \sqrt{\pi} (-1)^{n-1} 2^{\frac{3n-2}{2}} t^n e^{\frac{i|x-a|^2}{4t}}}{(4\pi it)^{\frac{n}{2}} |x-a|^n} \frac{e^{-\frac{|x-a|^2}{16t^2\left(\sigma - i\frac{1}{4t}\right)}}}{\left[2\left(\sigma - i\frac{1}{4t}\right) \frac{4t^2}{|x-a|^2}\right]^{\frac{n}{2}}} = \\ &= \frac{(-1)^{n-1} \sigma_{n-1}}{2\pi^{\frac{n-1}{2}}} \frac{e^{\frac{\sigma|x-a|^2}{1+4t\sigma i}}}{(1+4t\sigma i)^{\frac{n}{2}}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из формулы (9) и равенства  $\sigma_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$  получаем равенство (1). Лемма

доказана.

**Доказательство теоремы.** Докажем существование  $W_+$ . Доказательство существования  $W_-$  проводится аналогично. Так как в нашем случае оператор  $B := -\Delta \equiv H_0$  спектрально абсолютно непрерывен, т.е.  $H_{ac} = L_2(R_n)$  и области определений операторов  $A := H$  и  $B := -\Delta$  совпадают с пространством  $W_2^2(R_n)$ , то из леммы 3 следует, что условие (a) Предложения выполняется. Докажем, что и условие (b) Предложения также имеет место. Для этого достаточно доказать, что

$$\int_0^{+\infty} \|q(x)e^{it\Delta}u(x)\|_{L_2(R_n)} dt < +\infty, \quad \forall u(x) \in D. \quad (10)$$

Из леммы 3 получаем

$$\left|q(x)e^{it\Delta}\left(e^{-\sigma|x-a|^2}\right)\right| \leq M \frac{|q(x)|}{|x-a|^{\frac{n-2-\varepsilon}{2}}} \frac{|x-a|^{\frac{n-2-\varepsilon}{2}} e^{-\frac{|x-a|^2}{2s}}}{(1+16t^2\sigma^2)^{\frac{n}{4}}}. \quad (11)$$

где  $\varepsilon$  - число, присутствующее в условиях *i*) и *ii*),  $s = \frac{1+16t^2\sigma^2}{2\sigma}$ , а  $M$  -

положительное постоянное число. Отметим, что для обозначения абсолютной положительной постоянной, не обязательно все время одной и той же, мы пользуемся буквой  $M$ .

Учитывая в (11) получаемое из леммы 2 неравенство

$$|x-a|^{\frac{n-2-\varepsilon}{2}} e^{-\frac{|x-a|^2}{2s}} \leq \left(\frac{n-2-\varepsilon}{2}\right)^{\frac{n-2-\varepsilon}{4}} s e^{-\frac{n-2-\varepsilon}{4}},$$

имеем

$$\left|q(x)e^{it\Delta}\left(e^{-\sigma|x-a|^2}\right)\right|^2 \leq M \frac{|q(x)|^2}{|x-a|^{n-2-\varepsilon}} \frac{1}{(1+16t^2\sigma^2)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}. \quad (12)$$

Замечая, что функция  $\frac{|q(x)|^2}{|x-a|^{n-2-\varepsilon}}$  интегрируется и в окрестности точки

$x = a$  (в силу условия *ii*)), и в окрестности бесконечно удаленной точки (в силу условия *i*)), из (12) получаем оценку

$$\left\|q(x)e^{it\Delta}\left(e^{-\sigma|x-a|^2}\right)\right\|_{L_2(R_n)} \leq M \left\{ \int_{R_n} \frac{|q(x)|^2}{|x-a|^{n-2-\varepsilon}} dx \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{(1+16t^2\sigma^2)^{\frac{1+\varepsilon}{4}}}. \quad (13)$$

Из оценки (13) следует справедливость неравенства (10). Таким образом, и пункт *b*) Предложения выполняется. Поэтому первая часть теоремы о существовании волновых операторов  $W_{\pm}$  доказана. Вторая половина теоремы вытекает из теоремы 3.2 работы [7, с. 656]. Теорема доказана.

**Замечание.** Теорема для оператора Шредингера установлена Т. Като [7, с. 661-662] ( $n = 3$ ;  $q(x) \in L_2(R_3)$ ), Куком и Хаком [4, с. 65, теорема XI.24] ( $n = 3$ ;  $q(x) \in L_p(R_3)$ ,  $2 \leq p < 3$ ), Браунелом [10] ( $q(x) \in L_p(R_n)$ ,  $p < n$ ), а для магнитного оператора Шредингера - Икэбе и Тайоси [8] ( $n = 3$ ;  $q(x) \in L_2(R_3)$ ).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ikebe T., Kato T. Uniqueness of the self-Adjoint Extension of Singular Elliptic Differential Operators // Arch. Ration. Mech. Anal., 1962, vol. 9, p. 77-92.
2. Алиев А.Р., Эйвазов Э.Х. О существенной самосопряженности оператора Шредингера в магнитном поле // Теоретическая и математическая физика, 2011, т. 166, № 2, с. 266-271.
3. Браверман М.Ш., Милатович О., Шубин М.А. Существенная самосопряженность операторов типа Шредингера на многообразиях // Успехи математических наук, 2002, т. 57, № 4(346), с. 3-58.
4. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики: Т.3. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982, 443 с.
5. Yafaev D. Scattering Theory; Some Old and New Problems. Berlin-New York: Springer, 2000, 184 p.
6. Ben-Artzi M. Spectral Theory for Divergence-Form Operators / in "Spectral and Scattering Theory and Related Topics", Ed. H. Ito, RIMS, Kokyuroku, 2008, 1607, p. 77-84.
7. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972, 740 с.
8. Ikebe T., Tayoshi T. Wave and Scattering Operators for Second-Order Elliptic Operators in  $R^3$  // Publ. RIMS, Kyoto Univ., ser. A, 1968, vol. 4, p. 483-496.
9. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений; Издание 4-е. М.: ФМ, 1963, 1108 с.
10. Brownell F.H. A note on Cook's Wave-Matrix Theorem // Pacific J. Math., 1962, vol. 12, no. 1, p. 47-52.

#### ÇOXÖLÇÜLÜ ŞRÖDİNGER OPERATORUNUN DALĞA OPERATORLARI HAQQINDA

E.H.EYVAZOV

#### XÜLASƏ

İşdə Kuk üsulu ilə çoxölçülü Şrödinger operatorunun dalğa operatorlarının varlığı isbat olunur. Elektrik potensialının üzərinə müəyyən şərtlər qoymaqla onların izometrikliyi göstərilir. Bunlardan əlavə bu operatorların başlanğıc və son oblastları tapılır.

**Açar sözlər:** Şrödinger operatoru, dalğa operatorları, səpilmə operatoru, Kuk üsulu.

#### ON WAVE OPERATORS OF MULTIDIMENSIONAL SCHRÖDINGER OPERATOR

E.H.EYVAZOV

#### SUMMARY

In this paper, the existence of wave operators of multidimensional Schrödinger operator is proved by Cook's method. Their isometricity is established under certain conditions on the electric potential. Moreover, the initial and terminal domains of these operators are found.

**Key words:** Schrödinger operator, wave operators, scattering operator, Cook's method.

*Поступило в редакцию: 21.05.2015 г.*

*Подписано к печати: 18.06.2015 г.*